第 3 节 等高线问题（★★★☆）

内容提要

本节归纳分段函数中的等高线问题. 例如，题干给出分段函数 $f(x)$ 满足 $f(m)=f(n)$，让求某个关于 m 和 n 的式子的取值范围，这类题常设 $f(m)=f(n)=t$，将 m 与 n 都用 t 表示，再代入目标代数式求范围.

典型例题

【例题】已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1,x\ge 0\\x+1,x<0\end{cases}$，若 $m<n$，且 $f(m)=f(n)$，则 $n-m$ 的最大值是（　　）

（A）$\ln 2$　　（B）1　　（C）2　　（D）$\ln 3$

解析：欲求 $n-m$ 的最大值，可先通过设 t 统一变量，设 $f(m)=f(n)=t$，如图，由图可知 $0\le t<1$，

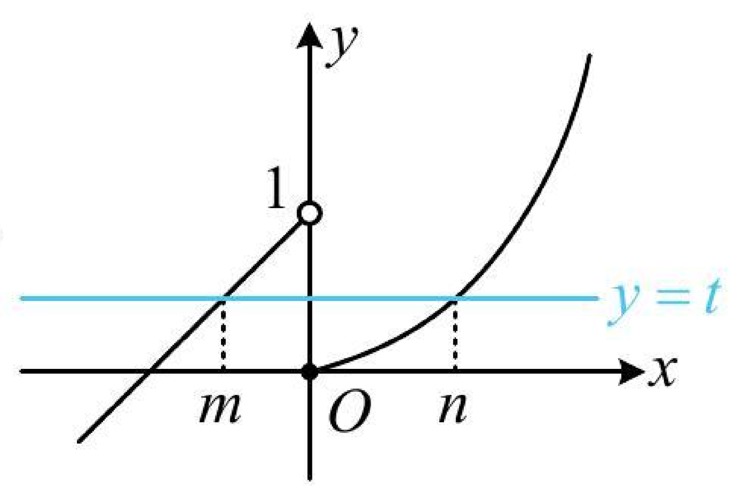
且 $m<0\le n$，所以 $f(m)=m+1=t\Rightarrow m=t-1$，$f(n)=e^n-1=t\Rightarrow n=\ln(t+1)$，故 $n-m=\ln(t+1)-t+1$，

这样变量就统一成了 t，接来下将右侧构造成函数，求导研究最值即可，

设 $\varphi(t)=\ln(t+1)-t+1(0\le t<1)$，则 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t+1}-1=-\dfrac{t}{t+1}\le 0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $[0,1)$ 上↘，从而 $\varphi(t)_{\max}=\varphi(0)=1$，故 $n-m$ 的最大值为 1.

答案：B



【总结】对于分段函数下出现的函数值相等条件，一般会设出等式（或连等式）的值，将变量统一，进而将题设问题转化为单变量函数问题来研究.

【变式】已知 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,0<x\le e\\4-\ln x,x>e\end{cases}$，若 $f(a)=f(b)=f(c)$ 且 $a<b<c$，则 $16a+\dfrac{e^4b}{c}$ 的取值范围是（　　）

（A）$(0,17)$　　（B）$[12,16e^{-1}+e^2]$　　（C）$[16e^{-1}+e^2,17)$　　（D）$[12,17)$

解析：欲求 $16a+\dfrac{e^4b}{c}$ 的取值范围，先通过设 t 将变量统一起来，设 $f(a)=f(b)=f(c)=t$，

如图，直线 $y=t$ 和 $f(x)$ 的图象得有 3 个交点，所以 $0<t\le 1$，且 $0<a<1<b\le e<c$，

所以 $f(a)=|\ln a|$，因为 $0<a<1$，所以 $\ln a<0$，从而 $f(a)=-\ln a=t$，故 $a=e^{-t}$，

又 $f(b)=|\ln b|$，且 $1<b\le e$，所以 $\ln b>0$，从而 $f(b)=\ln b=t$，故 $b=e^t$，

而 $f(c)=4-\ln c=t\Rightarrow c=e^{4-t}$，所以 $16a+\dfrac{e^4b}{c}=16e^{-t}+\dfrac{e^{t+4}}{e^{4-t}}=16e^{-t}+e^{2t}$，

注意到 $e^{-t}=\dfrac{1}{e^t}$，$e^{2t}=(e^t)^2$，所以将 e^t 换元，可简化表达式，

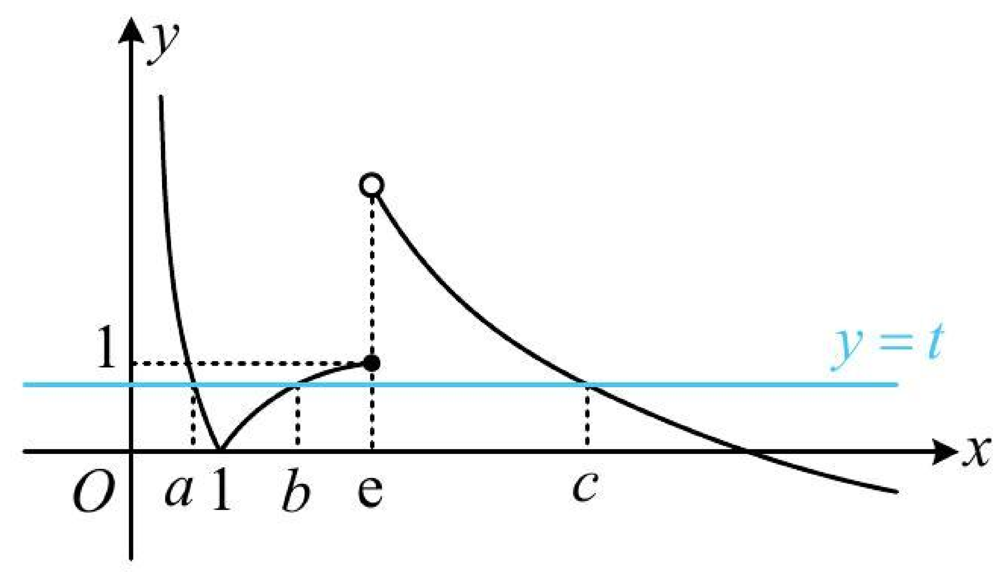
设 $u=\mathrm{e}^t$，则 $1<u\le \mathrm{e}$，且 $16a+\dfrac{\mathrm{e}^4 b}{c}=\dfrac{16}{u}+u^2$，设 $\varphi(u)=\dfrac{16}{u}+u^2(1<u\le \mathrm{e})$，则 $\varphi'(u)=-\dfrac{16}{u^2}+2u=\dfrac{2(u^3-8)}{u^2}$，

所以 $\varphi'(u)>0\Leftrightarrow 2<u\le \mathrm{e}$，$\varphi'(u)<0\Leftrightarrow 1<u<2$，

从而 $\varphi(u)$ 在 $(1,2)$ 上↘，在 $(2,\mathrm{e}]$ 上↗，故 $\varphi(u)_{\min}=\varphi(2)=12$，

又 $\varphi(1)=17>\varphi(\mathrm{e})=\dfrac{16}{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^2$，所以 $\varphi(u)$ 的值域为 $[12,17)$，即 $16a+\dfrac{\mathrm{e}^4 b}{c}$ 的取值范围是 $[12,17)$.

答案：D



强化训练

1．（2022·赣州期末·★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x+2),x<1\\ \ln x,x\ge 1\end{cases}$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，且 $x_2>x_1$，则 x_2-x_1 的最小值为_____.

2．（★★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1,x\le 0\\ \lg x,x>0\end{cases}$，若存在不相等的实数 a,b,c,d 满足 $|f(a)|=|f(b)|=|f(c)|=|f(d)|$，则 $a+b+c+d$ 的取值范围为（　　）

（A）$(0,+\infty)$　（B）$(-2,\dfrac{81}{10}]$　（C）$(-2,\dfrac{61}{10}]$　（D）$(0,\dfrac{81}{10}]$